238

DIPLOME VISE PAR LE MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE

ETABLISSEMENT PRIVE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR RECONNU PAR L'ETAT

22 BOULEVARD DU FORT DE VAUX 75017 PARIS TÉL. 270.34.80/90.95

Session de 1983
Concours d'admission
MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Option Générale : Coefficient : 4

Option Technologique : Coefficient : 3

EXERCICE 1 (5 points)

Soit la fonction :

$$f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ r \to \begin{cases} f(r) = 0 & \text{si} \quad r \leq 0 \\ f(r) = \lambda^2 r.e^{-\lambda r} & \text{si} \quad r > 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Construire le graphe de f(r).

c) Calculer $F(s) = \int_0^s f(r).dr$

d) Calculer si elle existe la limite : $\lim_{t \to +\infty} \int_s^t \frac{f(r)}{r}.dr$.

e) On considère la fonction :

$$L(s) = F(s) + s \int_s^{+\infty} \frac{f(r)}{r}.dr$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de L(s), $s \in \mathbb{R}_+^*$. Construire le graphe de L(s).

f) Résoudre l'équation $L(s) = \rho$

Application numérique : $\lambda = 3.10^{-5}$, $\rho = 0{,}8$.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f : x \to x\sqrt{\frac{x-1}{\lambda x + 1}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1°) Etudier les points à l'infini du graphe de f. En particulier, dans le cas d'asymptote, on précisera la place du graphe par rapport à l'asymptote.

2°) Etudier les variations de f.

3°) Représenter clairement les différentes formes du graphe de f.

.../...

PROBLÈME (10 points)

Le problème comprend deux parties largement indépendantes.

Partie I : on considère la matrice a termes réels :

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix} \qquad p \neq 1 \quad , \quad q \neq 1 \quad , \quad p + q \neq 2$$

1°) Trouver une relation entre P^2, P et I (matrice unité (2 x 2)). En déduire qu'il existe des scalaires a_n et b_n tels que :

$$P^n = a_n P + b_n I.$$

Ecrire les relations de récurrence qui déterminent a_n et b_n.

2°) Exprimer a_n, b_n et P^n en fonction de n.
Comment doit-on choisir p et q pour que $P^2 = P$?

3°) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de P. Peut-on former une base de vecteurs propres ?

4°) Soit A une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de P, montrer qu'elle est régulière et calculer son inverse A^{-1}.

Effectuer le calcul $A^{-1} . P . A$

En déduire l'expression de P^n en fonction de n.

Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de P^n ?

5°) Dans le cas ou $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, en déduire la limite de P^n quand n augmente indéfiniment.

Partie II : on considère une suite d'épreuves répétées, chacune admettant deux résultats possibles seulement : R_1 et R_2.

On supposera que le résultat d'une épreuve dépend de celui de l'épreuve précédente. On note p la probabilité d'obtenir R_1 à une épreuve, après qu'il se soit réalisé à l'épreuve précédente, q la probabilité d'obtenir R_2 à une épreuve après qu'il se soit réalisé à l'épreuve précédente. On suppose que p et q sont indépendantes du rang de l'épreuve.

On note a_1 et b_1 les probabilités respectives d'obtention de R_1 et R_2 à la première épreuve.

1°) Calculer les probabilites des evénements :
- Avoir R_1 à une épreuve, R_2 ayant été réalisé à l'épreuve précédente.
- Avoir R_2 à une épreuve, R_1 ayant eté réalisé a l'épreuve précédente.
- Obtenir R_1 à la deuxième épreuve (notée a_2)
- Obtenir R_2 à la deuxième épreuve (notee b_2).

Trouver la matrice M telle que : $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

2°) On note $P_{i,j}^{(2)}$ la probabilité de l'évènement :

avoir R_j à une épreuve, R_i ayant été réalisé 2 épreuves avant, (ou encore : "passage" de R_i à R_j en 2 épreuves),
$i \in \{1, 2\}$ $j \in \{1, 2\}$

Que peut-on dire de la matrice

$$\begin{bmatrix} P_{1,1}^{(2)} & P_{2,1}^{(2)} \\ P_{1,2}^{(2)} & P_{2,2}^{(2)} \end{bmatrix} ?$$

3°) Déduire de la première partie les probabilités des évènements :

- avoir R_i a une épreuve, R_i ayant été réalisé *n* épreuves avant.

Calculer les probabilites respectives a_n et b_n de R_1 et R_2 a la $n^{ième}$ épreuve. Ont-elles une limite quand le nombre d'épreuves augmente indefiniment ?

FIN